代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.111-116

主 $\mathbb{Q}$-FANO 三様体の分類
種数が 7 の事情

高木寛通

1. はじめに

昨年, 代数学シンポジウムで話させて頂いて, その報告集に「主 $\mathbb{Q}$-ファノ一三様体の分類について（序）」(以下、[序]) という苦し紛れのタイトルで解説を書きました. あの時は, 分かっていたことはというと, その解説にある通り, 種数が（何の種数かは後できちんと述べます）8 以下になるということぐらいで, 結果というほどのものではなかったんですが, あれから一年ほど粘って, ようやく結果らしいものになりました. それがプレプリント [Taka] です. 城崎では, その中から, 種数 7 の場合の分類方法と結果を主に話そうと思っていたのですが, のんびり話してしまい, 結局, さわりで終わってしまいました. しかし, 今, その原稿を見ながらこれを書いているんですが, 終わる訳がないことは火を見るより明らかでした. どうも, 私は話すのが苦手なので, 何度か講演の練習をしたのですが, そうしているうちにもっと話せるのではないかと錯覚に陥ったんですね. その上, 予定外のことを言うことになりまして..... でもそれはとてもまったくもっておめでたいことだったのでよかったと自分では思っておりますが....

そんな話はさておき, この解説では, $\mathbb{Q}$-Fano の分類の歴史などは [序] に譲ることにして, その話したかった部分を中心に書いていきたいと思います.

2. 定義など

とはいうものの, 基本的な定義等は, 繰り返しとはなりますが, 改めてここで述べておきます.

定義 2.1. $\mathbb{Q}$-Cartier 整因子の数値的同値類の成す群が, 反標準因子のクラスで生成されている $\mathbb{Q}$-Fano を主 $\mathbb{Q}$-*Fano* 三様体（三様体は以下略）という. [1] また, 主 $\mathbb{Q}$-*Fano* X について, $g(X) := h^0(-K_X) - 2$ を X の種数という.

これを次の仮定の下で分類しようしていたのでした.

(A) X の種数は 2 以上.
(B) 反標準線型系が Du Val 特異点しか持たない元を含む.
(C) X は高々商特異点しか持たない.
(D) X の反標準因子は Cartier 因子ではない.

この仮定についての言い訳は, [序] を参照のこと.

この X と密接に関わってくるのが次です.

定義 2.2. 高々標準特異点の持ち, 反標準因子が豊富な Cartier 因子で, 動分解を持たない三次元多様体を非分解 *Fano* 三様体（例によって, 三様体は以下略）という. ここで, 動分解を持たないというのは, 反標準因子が二つの動く有効因子の和と線型同値にならないということ.

どう関わってくるのかを説明します.

[1][序] より広い定義. [序] の定義は Reid さんに従ったものだが, その定義だと, 例えば, 佐野さんの分類した, non-Gorenstein だが反標準因子が Cartier 因子と数値的に同値な $\mathbb{Q}$-Fano という面白いクラスが除かれてしまう.

命題 2.3. *X の商特異点の経済的な解消[2]をした後, 反標準因子と -1 で交わる $\mathbb{P}^1$ を中心とする爆発を繰り返すことで X を弱 Fano に移すことができる.*

この弱 Fano を Z, 上で得られた写像を $g: Z \to X$ としましょう. さらに Z の反標準モデル ($|-mK_Z|$ $(m \gg 0)$ に付随する正則写像) を $h: Z \to W$ とします. このとき, 定義から簡単に分かるように, W は非分解 Fano になっていて, X と W の種数は一致します. さらに, W が $-K_W$ で計った次数が 1 の $\mathbb{P}^2$ (以下, 平面) を含むこともわかります.

さて, 以下では, $-K_W$ が very ample だとします. このとき, [序] を書いた頃には確立されていなかったのですが, 必要なら X を少し変形することで, W が, 次に述べる 3 つの性質を満たしていることが分かるのです.

2.4 (基本性質). *(a)* W の特異点集合は, 平面に含まれるいくつかの直線と有限個の点の和集合.

(b) W に含まれる二つの平面は高々一点しか共有しない.

(c) (非分解性の精密化) W の任意の超平面切断は, 素因子, または, 素因子と (重複度も許した) いくつかの平面の和である. 特に, W は次数が 2 以上 $g(X)-2$ 以下の既約曲面を含まない.

一見すると, あまりインパクトのない性質のようですが, 実はこれらが W をかなり限定してくれることが分かります. 実際, 上の三性質を満たす W を分類すること[3]で X の分類が出来ると言ってもほぼいいでしょう. では, W をいかにして分類するか? それは, 方法としては極めて単純で, W を, その上の平面や W の特異点集合に含まれる直線 (以下, 特異直線) から射影してやって, よく知られているモデルに置き換える. そして, そのモデルからどうやって, W が再構成されるのかを調べる. ここでモデルと再構成の仕方が限られていることが分かるのでその結果, W が分類できるという寸法です.

3. 種数 7 の場合

さて, いよいよ, 前節の最後に言ったことを種数 7 のときに説明するときがやってきました (それほど大げさなことでもないんですが). 次が分類結果です.

定理 3.1. *X の種数が 7 であるとする. この時, X はただ一つの特異点を持ち, それは, $\frac{1}{r}(1,-1,1)$-特異点である. r は 2, 3, 4 のいずれか. さらに, 命題 2.3 の Z は, 特異点の経済的解消だけで得られる.*

以下, 種数 7 に限らずもっと広い範囲で成立する主張も述べつつ, それを, 種数 7 に適用したらどうなるのかを見ていきたいと思います.

その前に記号の設定.

記号.

L_*: 以下では, W が $|-K_W|$ で射影空間に埋め込まれていると考える. そして, その射影を考えるので, 得られる多様体 $*$ は皆, 自然に射影空間に埋め込まれている. その埋め込みを与える $*$ 上の very ample な因子を L_* と書く.

$\mu_{W,\Delta}: \widetilde{W}_\Delta \to W$: W の, 線型部分空間 Δ に沿っての爆発.

$E_{W,\Delta}$: ${\mu_{X,\Delta}}^{-1}\mathscr{I}_{\Delta/X}$ で定義される $\tilde{W}_\Delta$ の閉部分 scheme.

$\nu_{W,\Delta}: \widetilde{W}_\Delta \to W_\Delta$: $|{\mu_{X,\Delta}}^* L_X - E_{X,\Delta}|$ によって定義される正則写像.

---

[2]末端商特異点は, ある自然数 r, a があって (ただし, r と a は互いに素), $\mathbb{C}^3$ を, $\mathbb{Z}_r$ の作用 $(x,y,z) \to (\epsilon^a x, \epsilon^{r-a} y, \epsilon z)$ で割ったときに原点の像に生ずる特異点と解析的に同値, ここで, ϵ は, 1 の原始 r 乗根. このとき, この特異点は, $\frac{1}{r}(a, r-a, 1)$-特異点と呼ばれる. これを, $\frac{1}{r}(a, r-a, 1)$ なる重みで重み付きの爆発をしてやると同じタイプの特異点 (r と a が変わる) が生じる. これを繰り返すことでこの特異点の解消が得られる. それを経済的な解消と呼ぶ.

[3]この分類という言葉は意味が曖昧ですが, X の分類のために必要な程度に W の性質を絞ることくらいに考えてください.

さてまずは, W を平面 P から射影してみましょう. その結果, 得られる W_P を知りたいのですが, これを知るために、向井先生による非分解 Fano の分類を使います. ここは, 種数に依存するところです. 種数 7 の場合は, X が 10 次元直交 Grassmann 多様体 G の線型完全交叉になってますから, それを使うと (G を P を含む三次元線型空間から射影すればよい),

命題 3.2. W_P は $\mathbb{P}^5$ の $(2,2)$-完全交叉.

ここで大切なのは, W_P が del Pezzo 多様体になっているということです. 実は, 種数が 6 以上であれば, 他の種数でも, また, 特異直線からの射影に対しても, 多くの場合, W の射影が del Pezzo 多様体になるのです. このことに注目すると, 統一的な議論が出来ます. その結果を述べましょう. 以下, W_Δ が次数が 3 以上の del Pezzo 三様体と仮定します. さらに, 技術的なことですが, $\mu_{W,\Delta}$ が crepant であることが, X の種数が 7 で, Δ が平面の場合を含め, 必要な場合にはチェックできます. そこで以下では $\mu_{W,\Delta}$ が crepant を仮定します. 従って, 特に, $\widetilde{W}_\Delta$ は高々 Gorenstein 標準特異点しか持ちません.

定義 3.3.

$$F_{W,\Delta} := \nu_{W,\Delta}{}^*(-K_{W_\Delta}) - (-K_{\widetilde{W}_\Delta}).$$
$$C_\Delta := \nu_{W,\Delta}{}_*(-K_{\widetilde{W}_\Delta} \cdot F_{W,\Delta}).$$

$F_{W,\Delta}$, C_Δ は, それぞれ重み付きの $\nu_{W,\Delta}$ の例外因子, 中心といった感じです.

命題 3.4. Δ の次元を s とおく (W_Δ は $\mathbb{P}^{g(X)-s}$ に埋め込まれていることに注意). このとき次が成り立つ.

(1)

$$E_{W,\Delta} = \nu_{W,\Delta}{}^* L_{W_\Delta} - F_{W,\Delta}.$$
$$F_{W,\Delta} = \mu_{W,\Delta}{}^* L_W - 2E_{W,\Delta}.$$

(2)

$$C_\Delta = \delta C'_\Delta + \sum d_i m_i,$$

ここで, δ, d_i は自然数, C'_Δ と m_i は既約曲線で,

(2-1) C'_Δ は空集合でなく, C'_Δ は $\mathbb{P}^{g(X)-s}$ の超平面を張る,

(2-2) $\deg C'_\Delta \geq p_a(C'_\Delta) + g(X) - s - 1$, そして, m_i に関しては,

(2-3) m_i が $\mathbb{P}^{g(X)-s}$ の超平面を張らなければ, m_i は平面の強変換, または, $\mu_{W,\Delta}$-例外因子の像.

(3)

$$\deg C_\Delta = 4 \deg W_\Delta - 2g(X) + s + 1.$$

細かいことはさておき, 大切なのは, まず, (1) により, $\mu_{W,\Delta}(F_{W,\Delta})$ が W のある超平面切断に含まれるということです. ここでまさに, W_Δ が del Pezzo 三様体であるという仮定が効いてきます. そして, これと基本性質 (c) によって, C_Δ がある程度制御できるのです. つまり, C_Δ がめちゃくちゃにたくさんの成分を持ったりはしないことが分かるのです. それが, (2) の心ですが, 種数 7, Δ が平面 P の場合に適用してみれば, もっと心に訴えるものがあるでしょう.

系 3.5. X の種数は 7, Δ が平面 P だとする. すると, C_P は既約で, 次数 5. [4]

これはこの場合の特殊事情とも言えるのですが, 他の場合でも既約とはまではいかないまでも, 種数 6 の一つの場合を除いて, C_Δ はせいぜい既約曲線と (重複度 1 の) 直線の和です.

さて, P を W 上の平面とするとき, C_P の既約性は, 種数 7 に限らず著しい結論をもたらします.

[4] 実際は, 算術種数が 1 ということまで分かる. 上の命題では不十分で少し議論がいる. 他の場合については, C'_Δ の算術種数まで決めることが私には出来なかった.

命題 3.6. P を W 上の平面とする. C_P が既約と仮定. すると, P は, W 上のただ一つの平面. さらに, 命題 *2.3* の Z は, 特異点の経済的解消だけで得られる. 特に, X はただ一つの特異点を持ち, それは, $\frac{1}{r}(1,-1,1)$-特異点である.

ここでは, P の一意性だけ説明しておきます. P 以外の平面 P' が W 上にあるとしてみましょう. もし, P と P' が交わるのなら, 基本性質 (b) により, 二つは, 一点のみ共有します. よって, $W \dashrightarrow W_P$ で, P' は直線につぶれますが, これは, C_P の既約性に反します. P と P' が交わらないとしましょう. よって, $W \dashrightarrow W_P$ で, P' は平面に写りますが, 命題 3.4 (1) により, P は W_P の超平面切断に写るから, P と P' の W_P 上の像は, 直線で交わることになります. これは, 直線につぶれる $\nu_{W,P}$-例外因子があることを意味しますから, やはり, C_P の既約性に反します. かくして, P の一意性が示されました.

そこで, 種数 7 の場合は, あとは, r を抑えすればよいことになります. これには, W_P のもっとデリケートな性質が関わってきます. そこで W_P (もっと一般に W_Δ) を詳しく調べた結果をここで述べておきます.

命題 3.7. *(1)* もし, W_Δ の次数が 5 ならば, W_Δ は非特異である.

(2) もし, W_Δ の次数が 4 ならば, W_Δ は高々末端特異点しか持たず, 次のいずれかが成立する:

(2-1) W_Δ が分解的[5], または,

(2-2) W_Δ が分解的でない, かつ, *crepant* な分解化 $\widehat{W} \to W_\Delta$ は特異点解消で, $\rho(\widehat{W})$ は 2 (従って *crepant* な分解化はちょうど二つある). さらに, 一つの *crepant* な分解化は, 因子 $E \simeq \mathbb{P}^2$ を非特異 5 次 *del Pezzo* $\overline{W}$ 上の非特異点につぶす縮小写像を持ち, もう一方は, $\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$-束の構造を持つ. W_Δ は, ただ一つの平面 E_1 を持ち, それは E の像であり, $\nu_{W,\Delta}(E_{W,\Delta})$ に含まれる.

特に W_Δ が分解的であることと, $\nu_{W,\Delta}(E_{W,\Delta})$ が既約であることとは同値である.

この証明は長いですが, 手法としては標準的で, W_Δ の相対的極小モデル W' をとって, W' の持つ端射線縮小写像を徹底的に調べる. この際, $-K_{W_\Delta}$ が $\operatorname{Pic} W_\Delta$ の中で 2 で割れるということと, 基本性質 (c) が, その可能性に強い制限を与える. 実際、縮小写像の分類としては, Gorenstein 末端特異点しか持たない三様体からのものさえ分かってればよい. 極小モデルプログラムが, こうやって具体的に使えるというのを実感できる幸せなひと時を味わえます.

さて, C_P が既約な場合の, W_P と X の特異点の関係に話を戻しましょう. 先ほど言った「W_P のもっとデリケートな性質」とは, W_P の分解性のことです. 実際, 次のように W_P の分解性が X の特異点に関わってきます.

命題 3.8. 命題 *3.6* の仮定の他, $\nu_{W,P}(E_{W,P})$ が既約と仮定 (これは, W_Δ の次数が 4 以上なら, 命題 *3.4* により, W_P が分解的なことと同値). このとき, 命題 *3.6* の r は 2. 逆に r が 2 ならば, $\nu_{W,P}(E_{W,P})$ は既約.

証明は, まず, 命題 3.6 の P の一意性の証明と同様にして, $E_{W,P}$ が既約であることが分かります. これは, W が特異直線を持たないことを意味します. もし, r が 3 以上ならば, X の経済的特異点解消の例外因子のうち, 最後に $\frac{1}{2}(1,1,1)$-特異点を解消して出てくる $\mathbb{P}^2$ (これが P に写る) 以外のものが, W の特異直線につぶれてしまいます. よって, r は 2. 「逆に」の部分は略します.

というわけで, 種数 7 の X について, 残るは, W_P が分解的でない場合です. このとき, 命題 3.7 (2-2) を見ると, 非特異 5 次 del Pezzo $\overline{W}$ の影がちらつきますね. これは一体何なのでしょうか. まず, 命題 3.8 とその証明から, W は特異直線を持つことが分かります. さらに, 実は, それが一意であることも分かるのです. そこで, その特異直線を l とします. すると,

命題 3.9. $\overline{W} \simeq W_l$.

[5] この「分解的」というのは, 上の非分解 Fano の「分解」とはまったく関係ない. 英語で言えば, factorial, つまり, すべての Weil 因子は Cartier 因子ということである.

これはよく考えれば, 当たり前とも言えます. 命題 3.7 (2-2) により, W_P はただ一つの平面 E_1 を持ち, それは, $\nu_{W,\Delta}(E_{W,\Delta})$ に含まれる. ちょっと考えれば, E_1 は P の強変換であることが分かります. 他方, P の W_l 上の像を ϱ とすると, $W \dashrightarrow W_P$ は, $W \dashrightarrow W_l$ と W_l の ϱ からの射影 $W_l \dashrightarrow (W_l)_\varrho$ に分解します. ここで, $W \dashrightarrow W_l$ で P はつぶれていますから, W_P から E_1 をつぶせば W_l 得られる, だから, $\overline{W}$ が W_l であると, 大雑把に言えばそういうことです.

うれしいのは, W_l がまたもや del Pezzo になるということで, これでいままでの手法をまた使うことが出来ます. [6] まず, C_l を調べましょう. 命題 3.4 を適用して少し議論すれば次が得られます. 今度は, C_l が既約とは限りません.

命題 3.10. $\deg C_l = 8$ で次のいずれかが成立する:
(1) C_l は既約.
(2) $C_l = C_l' + m$, ここで, m は直線. $\deg(C_l') = 7$ で $p_a(C_l') = 1$.
[7]

想像がつくかも知れませんが, 今度は, C_l の既約性が X の特異点に関わってきます. 一気に結論を述べてしまいましょう.

命題 3.11. この命題では種数は 7 とは仮定しない. P を W 上の平面とし, P 上に少なくとも一つ特異直線があるとする. さらに, P 上の任意の特異直線 l に対し, $\mu_{W,l}$ は *crepant*, W_l は次数 3 以上の分解的な *del Pezzo* 三様体, そして, C_l は既約とする. このとき, P は, W 上のただ一つの平面. さらに, 命題 *2.3* の Z は, 特異点の経済的解消だけで得られる. 特に, X はただ一つの特異点を持ち, それは, $\frac{1}{3}(1,-1,1)$-特異点.

この命題の証明は, ほとんど命題 3.8 と同じです.

命題 3.12. この命題では種数は 7 と仮定. さらに, 命題 *3.9* の *(2)* が成立するとする. このとき, $E_{W,l}$ は可約で, 次が成立:
(1) $E_{W,l}$ は, $\nu_{W,l}$-例外的な成分 E' を持ち, $\mu_{W,l}(E')$ は l である.
(2) $E_{W,l} = E' + E''$, ここで, E'' は既約で E'' と異なる.
(3) $\nu_{W,l}(E'')$ は非正規な *del Pezzo* 曲面で $\nu_{W,l}(E')$ は $\operatorname{Sing}\nu_{W,l}(E'')$ に一致.
(4) $E'' \to \nu_{W,l}(E'')$ は有限射. さらに, W は l の一般点で, cA_2-特異点を持つ. よって, 命題 *3.6* の r は 4.

ここでは, 「W は l の一般点で, cA_2-特異点を持つ」という部分を他の部分を認めて説明しておきます. (2) によって, W は l の一般点で, cA_k-特異点を持つということは分かります. もし, k が 3 以上ならば, $\widetilde{W_l}$ は, E' と E'' の交わりの成分のうち, l を支配する部分 l' の一般点で cA_{k-2}-特異点を持ちます. l' は, (4) の前半によれば, $\nu_{W,l}$ でつぶれません. よって, W_l が非特異なので, $\nu_{W,l}(l')$ は重複度を持って C_l に含まれなければなりません. しかし, これは, 命題 3.10 に反します.

ここで, この命題の (4) が成立するのは極めてラッキーなんです. もし, E と E' の交わりがつぶれでもしようものなら, その交わりにおける $\widetilde{W_l}$ の特異点を調べなければならず, 一苦労になるはずだったでしょう. 実際, 種数 6 の場合にはこの命題と非常に似た主張が存在するんですが, 残念ながら E と E' の交わりがつぶれるということがあり得ます. これは, 細かい話になりますが, 種数 6 の場合は, W_l が次数 4 の del Pezzo であり, 特異点を持ち得ることに起因してます. この場合を議論するために論文のページ数がかなり増えてしまいました. なにかすっきりした議論が見つかればいいなと思ってはいるんですが, 世の中そう甘くはありませんね.

4. X からの双有理射の記述

以前行った, 高々$\frac{1}{2}(1,1,1)$-特異点のみ持つ $\mathbb{Q}$-Fano X の分類では, 一つの $\frac{1}{2}(1,1,1)$-特異点で X を爆発させて, その後に続く双有理射を, 端射線の理論に基づいて数値的

[6] $\mu_{W,l}$ が crepant も確認できる.
[7] 細かいことですが, 射影 $W_l \dashrightarrow W_P$ で C_l' が C_P に写ることが分かり, それによって, 二つの次数の関係から, $\operatorname{Sing} C_l'$ は一点 w で, $\operatorname{mult}_w C_l' = \deg C_l' - 5$ である.

に限定することで, 目的を達成しました. その過程で, X と他の森ファイバー空間を, flop と flip でつなぐことができたのでした. 今回は数値的な計算はしていませんが, 上の分類法を注意深く眺めてやると同様のことが分かります. それを述べて本稿を終わりにしたいと思います.

x を X の $\frac{1}{r}(1,-1,1)$-特異点とし, $f:Y\to X$ を $\frac{1}{r}(a,r-a,1)$ なる重みでの重み付きの爆発とする. E を f の例外因子とする. このとき, 次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[r, dashed] \arrow[dl, "f"'] & Y' \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & & X', \end{tikzcd}$$

ここで,

(1) X' は以下の通り.
 (1-1) r が 2 ならば, W_P.
 (1-2) r が $3,4$ ならば, W_l.
 ちゃんと X' が分解的になっていることに注意.

(2) f' は以下の通り.
 (2-1) r が 2 ならば, $\nu_{W,P}$.
 (2-2) r が 3 ならば, f' は因子 E' を C_l につぶす双有理射. $\operatorname{Sing} Y'$ は一点から成り, それは $\frac{1}{2}(1,1,1)$-特異点で, C_l の特異点上にある $E'\to C_l$ のファイバーに乗っている.
 (2-3) r が 4 ならば, C_l' を中心とする W_l の爆発. C_l' は平面的特異点を一つだけ持ち, その外で非特異なので, Y' は Gorenstein 末端特異点を一つだけ持ち, その外で非特異. 既約曲線での爆発だから, $\rho(Y')=2$ で, Y' は分解的なことに注意.

(3) $Y \dashrightarrow Y'$ は次の通り.
 (3-1) r が $2,3$ ならば, flop.
 (3-2) r が 4 ならば, flop と flip の合成. flipping curve は既約で, その上に $\frac{1}{3}(1,-1,1)$-特異点が乗っている. flipped curve も既約で, その $X'\simeq W_l$ 上の像は, C_l に含まれている直線 m. Y' の唯一の Gorenstein 末端特異点は flipped curve に乗っている.

結局, W_P や W_l をぐっとにらむ事ですべてが分かってしまうというのが, 自分としては面白かったですね.

References

[Taka] H. Takagi, *Classification of primary $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds with anti-canonical Du Val K3 surfaces. I*, preprint.

RIMS, Kyoto University, Kitashirakawa, Sakyo-ku, 606-8502 Kyoto, Japan